第 2 节 分段函数中的动态分段点问题（★★★）

强化训练

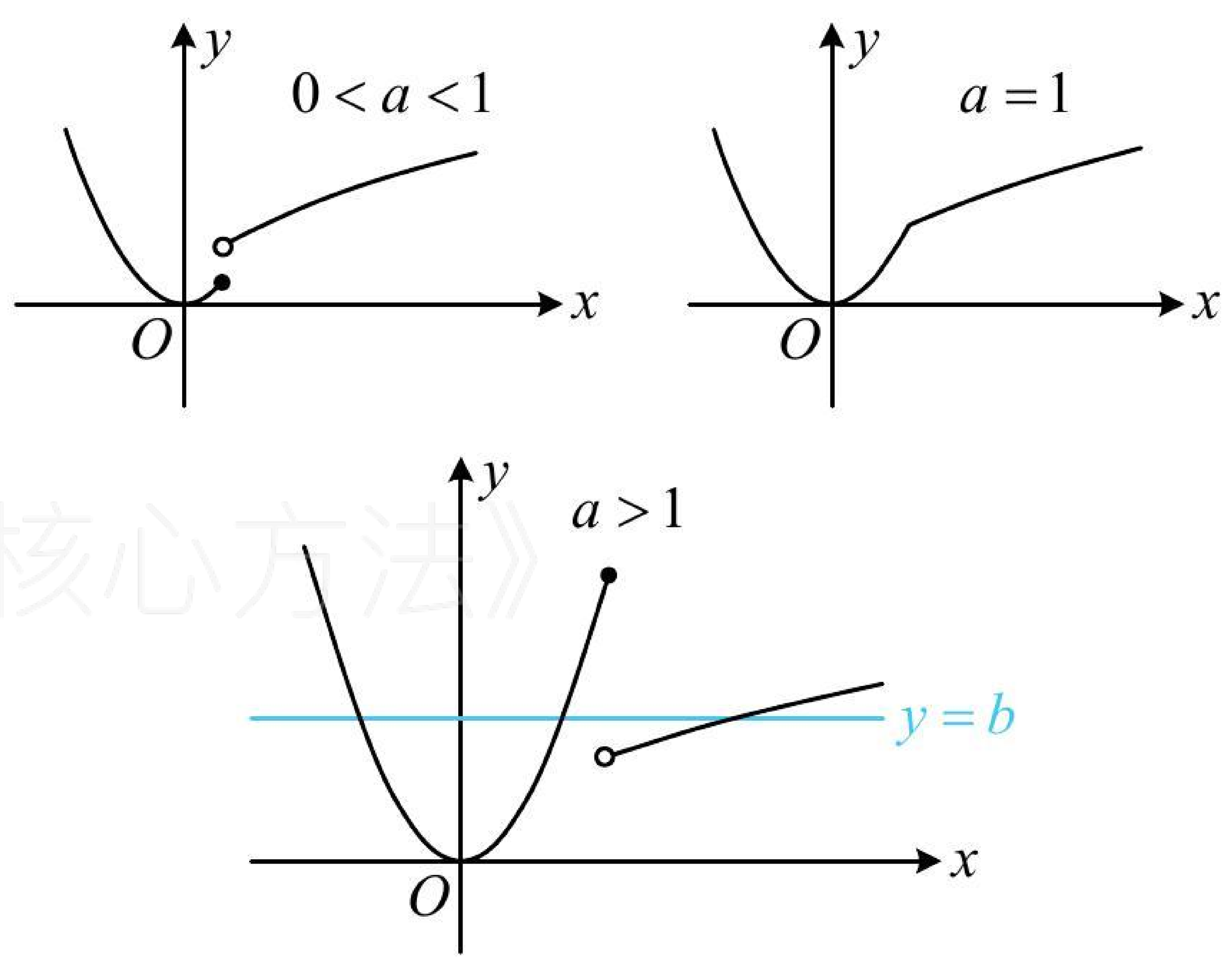
1．（★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\le a\\ \sqrt{x}, x>a\end{cases}$，其中 $a>0$，若存在实数 b，使得函数 $g(x)=f(x)-b$ 有 3 个零点，则实数 a 的取值范围为_____.

答案： $(1,+\infty)$

解析： $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=b$，所以问题等价于存在水平直线 $y=b$ 和 $f(x)$ 的图象有 3 个交点，

注意到函数 $y=x^2$ 和 $y=\sqrt{x}$ 的交点是 $(1,1)$，所以分 $0<a<1$， $a=1$， $a>1$ 三种情况画图分析，

如图，由图可知，只有当 $a>1$ 时，才能画出水平直线 $y=b$ 与 $f(x)$ 的图象有 3 个交点，所以 $a>1$.

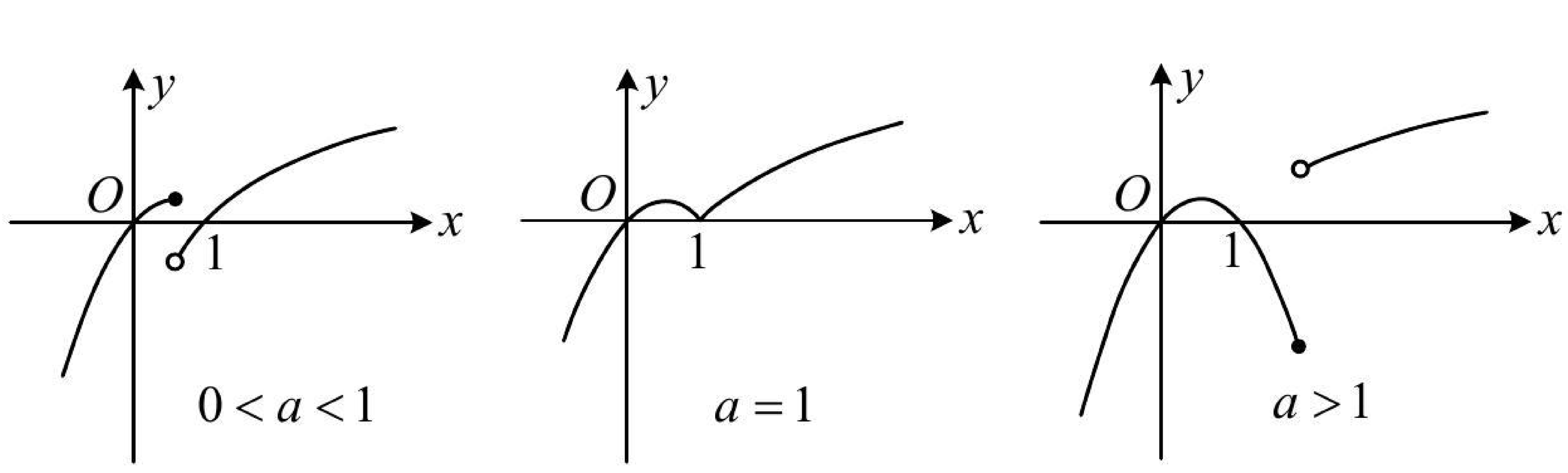


2．（★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, x>a\\ x-x^2, x\le a\end{cases}$，其中 $a>0$，若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值，则实数 a 的取值范围为_____.

答案： $[1,+\infty)$

解析： 注意到 $y=\ln x$ 和 $y=x-x^2$ 的交点在 $x=1$ 处，所以分 $0<a<1$， $a=1$， $a>1$ 三种情况考虑，

如图，由图可知当且仅当 $a\ge 1$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值.



3．（2023・重庆模拟・★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, x\le a\\ 2^x, x>a\end{cases}$，若 $f(x)$ 的值域是 **R**，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,0]$　　（B）$[0,1]$　　（C）$[0,+\infty)$　　（D）$(-\infty,1]$

答案：B

解法 1：$f(x)$ 两段上的解析式都很简单，容易求值域，故分别求出值域，再取并集，

由题意，当 $x\le a$ 时，$f(x)=x+1\le a+1$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上的值域是 $(-\infty,a+1]$；

当 $x>a$ 时，$f(x)=2^x>2^a$，所以 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上的值域是 $(2^a,+\infty)$；

由题意，$f(x)$ 的值域是 $\mathbf{R}$，所以 $(-\infty,a+1]\cup(2^a,+\infty)=\mathbf{R}$，故 $2^a\le a+1$ ①，

不等式①不易直接求解，可画图来看，

函数 $y=2^x$ 和直线 $y=x+1$ 在同一坐标系下的大致图象如图 1，由图可知不等式①的解为 $0\le a\le 1$.

解法 2：$f(x)$ 两段上的解析式都很简单，可画图来看，

在同一坐标系下画出直线 $y=x+1$ 和函数 $y=2^x$ 的图象如图 1，

观察发现二者有两个交点，横坐标分别为 0 和 1，故可讨论 a 与 0，1 的大小，来看图象的运动过程，

①当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的大致图象如图 2，$f(x)$ 的值域不是 $\mathbf{R}$，不合题意；

②当 $0\le a\le 1$ 时，如图 3（其中 $a=0$ 和 $a=1$ 的情形未画出，可自行想象），$f(x)$ 的值域是 $\mathbf{R}$，满足题意；

③当 $a>1$ 时，如图 4，$f(x)$ 的值域不是 $\mathbf{R}$，不合题意；

综上所述，a 的取值范围是 $[0,1]$.

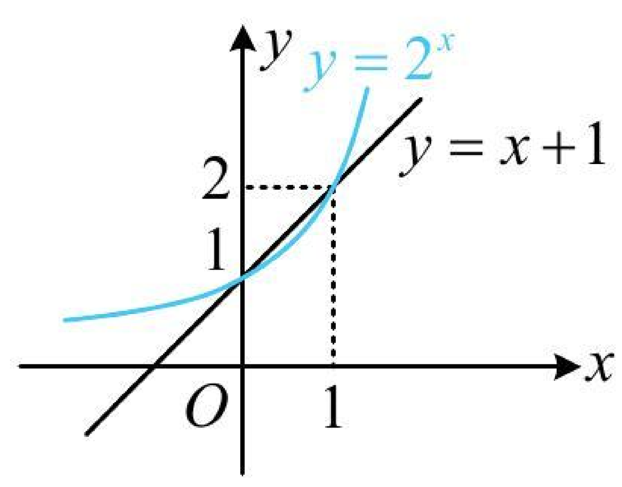


图1

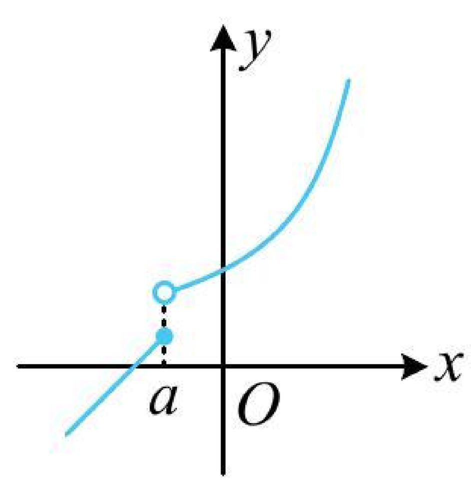


图2

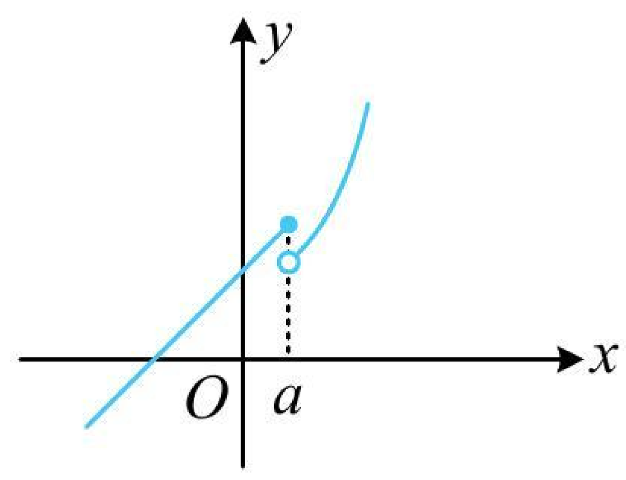


图3

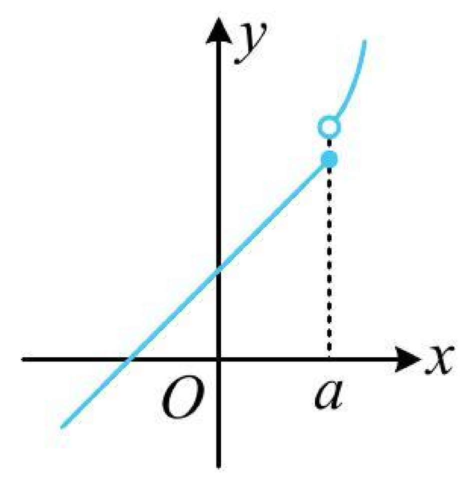


图4

4.（2022 • 北京模拟 • ★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\le a\\x^2-2ax+a,x>a\end{cases}$，若存在实数 b，使得函数 $g(x)=f(x)-b$ 有 3 个零点，则 a 的取值范围为_____.

答案：$(\frac{1}{2},+\infty)$

解析：$g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=b$，故 $g(x)$ 有 3 个零点 $\Leftrightarrow$ 直线 $y=b$ 与 $f(x)$ 的图象有 3 个交点，

两段上 $f(x)$ 都是二次函数，对称轴分别为 $x=0$ 和 $x=a$，可以讨论 a 与 0 的大小来作图分析，

①当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的图象如图 1 所示，由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上↘，在 $(a,+\infty)$ 上↗，

所以直线 $y=b$ 与 $f(x)$ 的图象至多 2 个交点，不合题意；

②当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2$，不合题意；

③当 $a>0$ 时，如图 2，要使存在直线 $y=b$ 与 $f(x)$ 的图象有 3 个交点，

应有间断点处左侧的点位于右侧的上方，从而 $a^2>a-a^2$，故 $a>\frac{1}{2}$；

综上所述，a 的取值范围为 $(\frac{1}{2},+\infty)$.

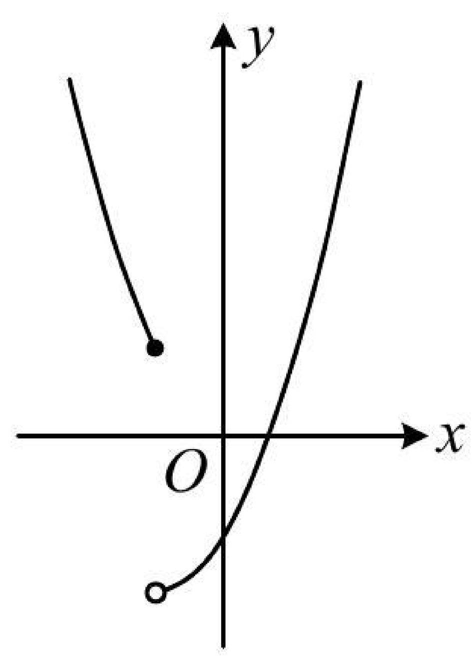


图1

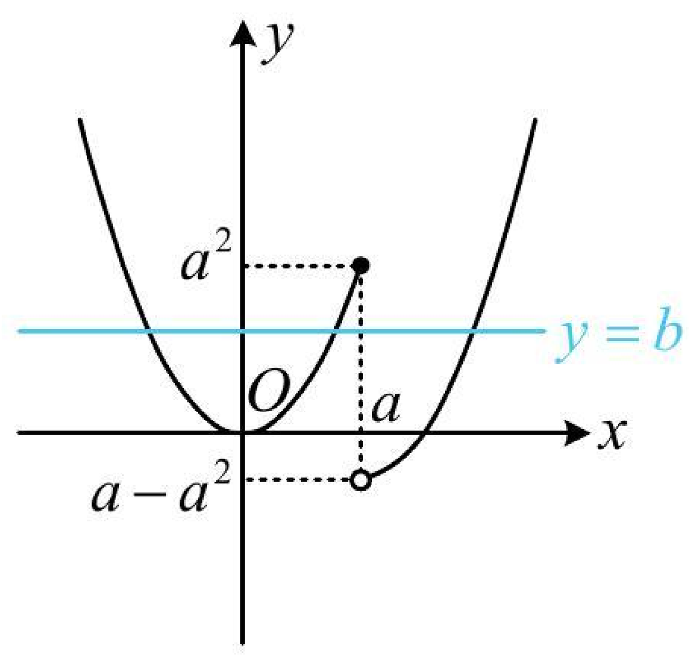


图2